BUKU AJAR

SISTEM PENGATURAN DASAR

Yoga Alif Kurnia Utama, S.ST., MT.
Yonatan Widianto, S.Kom., M.Kom.
Dr. Tri Arief Sardjono, S.T., M.T.
Dr. Ir. Hendra Kusuma, M.Eng.Sc.

penerbit aseni

SISTEM PENGATURAN DASAR

Oleh: Yoga Alif Kurnia Utama, S.ST., MT.
Yonatan Widianto, S.Kom., M.Kom.
Dr. Tri Arief Sardjono, S.T., M.T.
Dr. Ir. Hendra Kusuma, M.Eng.Sc.

180007

Penerbit Aseni (Anggota IKAPI Pusat)
Jl. Mambruk, RT 025,
Kelurahan Kwamki, Mimika Baru, Papua, Indonesia
Telp. 0877 3849 2767, 0822 3827 8001
Website: www.penerbitaseni.com
Email: office@penerbitaseni.com

Editor: Arief Budijanto, S.T., M.T., Budi Santoso, S.T., M.T.
Desain sampul: Yulius Hari, S.Kom., MBA., M.Kom.

ISBN 978-602-51711-3-0

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena telah melimpahkan nikmat, taufik, serta hidayah-Nya yang sangat besar sehingga buku yang berjudul “SISTEM PENGATURAN DASAR” bisa selesai dibuat pada waktunya. Buku ini merupakan hasil dari program Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi (PKPT) yang didanai oleh Kemenristek Dikti pada Tahun 2018.

Buku ini merupakan buku ajar sebagai panduan bagi para akademisi yang dalam mempelajari mata kuliah sistem pengaturan dasar dalam jurusan teknik elektro khususnya teknik sistem pengaturan. Buku ini memaparkan beberapa kecerdasan buatan yang sering dimaanfaatkan untuk mengontrol sebuah sistem elektrik. Selain itu, buku ini juga memperlihatkan beberapa contoh soal yang bermanfaat untuk meningkatkan pemahaman para akademisi dalam memahami buku ini.

Penulis mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya untuk semua pihak yang sudah mendukung dalam penyusunan buku ini yaitu sebagai berikut:

1. Kemeristek Dikti yang telah mendanai seluruh kegiatan PKPT ini.
2. Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah menyediakan sarana dan prasarana yang lengkap dalam pelaksanaan PKPT ini.
3. Universitas Widya Kartika yang telah menyediakan sarana dan prasarana dalam penyusunan buku ini.
4. Budi Santoso sebagai desainer cover dan Arief Budijanto sebagai editor.
5. Semua pihak-pihak yang membantu dalam penyusunan buku ini.

Penulis berharap buku yang telah disusun ini bisa memberikan sumbangsih dalam menambah pengetahuan para akademisi di Indonesia terutama yang berkecimpung dalam dunia teknik elektro.

Akhir kata penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna, untuk itu penulis akan sangat terbuka dalam menerima kritik dan saran yang membangun bagi perbaikan buku ini di kemudian hari.

Surabaya, Mei 2018

Penulis

PERSEMBAHAN

Buku yang merupakan hasil dari program Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi yang didanai oleh Kemenristek Dikti Tahun 2018 ini akan dipersembahkan kepada semua para akademisi di seluruh Indonesia

BAB 1.
PENGANTAR
SISTEM PENGATURAN DASAR

1.1 Pendahuluan

Kontrol automatik telah memegang peranan penting dalam perkembangan ilmu dan teknologi, karena kemajuan dalam teori dan praktek kontrol automatik memberikan kemudahan dalam mendapatkan performansi dari sistem dinamik, mempertinggi kualitas dan menurunkan biaya produksi, dan sebagainya, maka sebagian insinyur dan ilmuwan sekarang harus mempunyai pemahaman yang baik dalam bidang ini.

Proses perkembangan ilmu kontrol automatik atau ilmu sistem pengaturan dasar ini tidak dicapai tidak secara tiba-tiba, melainkan melalui sejarah perkembangan yang cukup panjang. Perkembangan ilmu kontrol ini dapat dilihat pada Tabel 1.1 di bawah ini.

Tabel 1.1 Perkembangan Ilmu Kontrol

No	Tahun	Perkembangan Sistem Kontrol
1	1769	Mesin Uap James Watt telah dibuat. Mesin ini sering digunakan pada awal Revolusi Industri di Inggris. Selama Revolusi Industri, hal ini merupakan langkah besar dalam perkembangan awal mula teknologi mekanis automasi
2	1800	Eli Whitney mengemukakan konsep “interchangeable manufacture”, yaitu konsep memproduksi komponen atau bagian yang sama (persis) sehingga komponen dari suatu unit dapat dipertukarkan dengan komponen dari unit yang lainnya sehinggga akam mempermudah dalam proses perakitannya.
3	1868	J.C. Maxwell memformulasikan model matematis dalam mengontrol mesin uap.

4	1913	Mesin perakitan mekanik Henry Ford diperkenalkan dalam pembuatan mobil.
5	1922	Minorsky membuat alat kendali automatik untuk pengemudian kapal dan menunjukkan cara menentukan kestabilan dari persamaan diferensial yang melukiskan sistem.
6	1927	H.W. Bode menganalisa penguatan feedback.
7	1932	Nyquist mengembangkan suatu prosedur yang relative sederhana untuk menentukan kestabilan loop tertutup.
8	1952	Kontrol Numerik dikembangkan oleh Massachusetss Institute of Technology untuk kontrol sumbu pada mesin.
9	1954	George Devol mengembangkan “programmed article transfer” yang digunakan dalam desain robot industri pertama.
10	1960	Unimate Robot pertama kali diperkenalkan berdasarkan desain dari Devol. Unimate digunakan pada tahun 1961 untuk merawat mesin die-casting.
11	1970	Model state variable dan kontrol optimal diperkenalkan
12	1980	Desain sistem kontrol Robust telah banyak dipelajari.
13	1990	Perusahaan manufacturing export-oriented telah menggunakan proses automasi
14	1994	Kontrol feedback telah digunakan secara luas di dalam mobil. Sistem robust sudah diperlukan dalam semua industri manufacturing.

Metode respon frekuensi dan tempat kedudukan akar yang merupakan inti teori sistem kendali klasik, akan mendasari pembuatan sistem yang stabil dimana memenuhi persyaratan unjuk kerja untuk semua sistem pengendalian. Sejak akhir tahun

1950, penekanan desain sistem kendali telah beralih kearah desain multi sistem yang berkerja bersama sama membentuk satu kesatuan system yang lebih besar.

Teori klasik yang membahas sistem satu maşukan satu keluaran, semenjak tahun 1960 sudah tidak dapat digunakan untuk sistem multi maşukan dan multi keluaran. Dengan kata lain bahwa sistem kendali multi masukan-multi keluaran menjadi semakin kompleks, sehingga pemecahannya memerlukan banyak persamaan. Oleh karena itu, logis bila kita memerlukan peralatan bantu yang memadai dalam pengendalian sebuah sistem seperti penggunaan komputer analog maupun peralatan digital secara langsung.

Sekitar tahun 1960an, teori kontrol modern telah dikembangkan untuk mengatasi masalah kompleksnya plant modern dan persyaratan lainnya. Dengan adanya komputer elektronik analog, digital, dan hybrid yang dapat digunakan pada perhitungan yang kompleks, maka penggunaan komputer pada desain sistem kontrol menjadi praktis dan umum. Oleh sebab itu, wajar bila suatu industri besar dan modern sangat memerlukan tenaga ahli dalam perencanaan sistem kendali dan teknisi profesional sebagai operator dari berbagai disiplin ilmu yang saling terkait.

1.2 Istilah dalam Sistem Pengaturan

Banyak istilah yang digunakan dalam ilmu kontrol atau ilmu sistem pengaturan dasar. Penjabaran definisi dari istilah-istilah ini membuat desain kontrol suatu sistem dapat dibuat dengan baik. Istilah-istilah tersebut dijabarkan dalam Tabel 1.2 di bawah ini.

Tabel 1.2 Istilah-Istilah dalam Ilmu Kontrol

No	Istilah	Definisi
1	Masukan	Rangsangan dari luar yang diterapkan ke sebuahsistem kendali untuk memperoleh tanggapan tertentu dari sistem pengaturan.masukkan juga sering disebut respon keluaran yang diharapkan.

2	Keluaran	Tanggapan sebenarnya yang didapatkan dari suatu sistem kendali.
3	Plant	Seperangkat peralatan yang terdiri dari beberapa bagian mesin yang bekerja bersama, yang digunakan untuk melakukan operasi tertentu. Contohnya seperti tungku pemanas, reactor kimia, dan pesawat ruang angkasa.
4	Process	Operasi atau perkembangan alamiah yang berlangsung secara kontinyu yang ditandai oleh satu deretan perubahan kecil yang berurutan dengan cara yang relatif tetap dan menuju ke suatu hasil atau keadaan akhir tertentu (Kamus Merriam-Webster). Contohnya adalah proses kima, ekonomi, biologi, dan lain sebagainya.
5	System	Kombinasi dari beberapa komponen yang bekerja bersama-sama dan melakukan suatu sasaran tertentu. Konsep sistem dapat digunakan pada gejala abstrak dan dinamis seperti yang dijumpai pada ekonomi.Oleh karena itu sistem harus diintrepresentasikan untuk menyatakan sistem fisik, biologi, ekonomi, dan sebagainya.
6	Disturbance	Suatu sinyal yang cenderung mempunyai pengaruh yang merugikan pada harga keluaran sistem. Jika suatu gangguan dibangkitkan dalam sistem disebut dengan gangguan internal sedangkan gangguan yang dibangkitkan dari luar sistem dan

		merupakan suatu masukan disebut dengan gangguan eksternal.
7	Feedback Control	Suatu operasi yang dengan adanya beberapa gangguan, cenderung memperkecil selisih antara keluaran sistem dan masukan acuan dan bekerja berdasarkan selisih tersebut, hanya terhadap kejadian yang tidak dapat diketahui sebelumnya yang dimaksudkan untuk pengontrolan sistem.
8	Feedback Control System	Sistem kontrol yang cenderung menjaga hubungan yang telah ditentukan antara keluaran dan masukan acuan dan membandingkannya dan menggunakan selisihnya sebagai alat pengontrolan.
9	Servomechanism	Sistem kontrol berumpan balik dengan keluaran berupa posisi, kecepatan, atau percepatan mekanik.
10	Automatic Regulating System	Sistem kontrol berumpan balik dengan masukan acuan atau keluaran yang diinginkan konstan atau berubah terhdap waktu dengan lambat dan tugas utamanya adalah menjaga keluaran yang sebenarnya pada harga yang diinginkan, dengan adanya gangguan.
11	Process Control System	Sistem regulator automatik dengan keluaran berupa besaran seperti temperature, tekanan, aliran, tinggi muka cairan atau pH.
12	Keadaan Tunak (Steady State)	Suatu proses pengendalian atau pengaturan yang untuk waktu tertentu tidak lagi mengalami perubahan harga besaran yang dikendalikan atau diatur tersebut.

13	Waktu Transien (Transient Time)	Waktu yang diperlakukan oleh suatu proses pengendalian atau pengaturan hingga mencapai kondisi tunak (steady state).
14	Sistem Kendali Adaptif	Suatu sistem kendali yang mempunyai kemapuan beradaptasi atau mengatur diri sesuai dengan perubahan pada kondisi atau struktur yang tidak dapat diramal.
15	Sistem Kendali dengan Penalaran (Learning Control System)	Sistem kendali yang mempunyai kemampuan menalar selisih antara masukan dan keluaran yang cukup kompleks dan memerlukan analisis serta penyelesaian secara automatik lagi akurat.
16	Sensing Element (Sensor)	Sensor bertugas mendeteksi gerakan atau fenomena lingkungan yang diperlukan sistem kontroler. Sistem dapat dibuat dari sistem yang paling sederhana seperti sensor on/off menggunakan limit switch, sistem analog, sistem bus paralel, sistem bus serial serta sistem mata kamera. Contoh sensor lainnya yaitu thermocouple untuk pengukur temperatur, accelerometer untuk pengukur getaran, dan pressure gauge untuk pengukur tekanan.
17	Transmitter	Alat yang berfungsi untuk membaca sinyal sensing element dan mengubahnya supaya dimengerti oleh controller.
18	Aktuator	Piranti elektromekanik yang berfungsi untuk menghasilkan daya gerakan. Perangkat bisa dibuat dari system motor listrik (Motor DC, Motor Servo, Motor Stepper, Ultrasonic Motor, Linier Motor,

		Torque Motor, Solenoid), sistem pneumatik dan hidrolik. Untuk meningkatkan tenaga mekanik aktuator atau torsi gerakan maka bisa dipasang sistem gear box.
19	Transduser	Piranti yang berfungsi untuk mengubah satu bentuk energi menjadi energi bentuk lainnya atau unit pengalih sinyal. Contohnya adalah mengubah sinyal gerakan mekanis menjadi energi listrik yang terjadi pada peristiwa pengukuran getaran. Terkadang definisi transmiter dan tranduser sering terjadi kerancuan. Keduanya sebenarnya mempunyai fungsi serupa, tetapi transduser lebih bersifat umum, namun transmiter pemakaiannya pada sistem pengukuran.
20	Measurement Variable	Sinyal yang keluar dari transmiter, ini merupakan cerminan sinyal pengukuran.
21	Set Point	Besar variabel proses yang dikehendaki. Suatu kontroler akan selalu berusaha menyamakan variabel terkendali terhadap set point.
22	Control Unit	Bagian unit kontroler yang menghitung besarnya koreksi yang diperlukan.
23	Final Controller Element	Bagian yang berfungsi untuk mengubah measurement variable dengan memanipulasi besarnya manipulated variable atas dasar perintah kontroler.
24	Alat Pengendali (Controller)	Alat pengendali sepenuhnya menggantikan peran manusia dalam mengendalikan suatu proses.

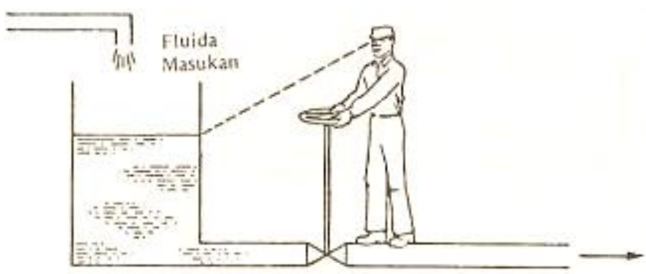
		Controller merupakan elemen yang mengerjakan tiga dari empat tahap pengaturan, yaitu membandingkan set point dengan measurement variabel, menghitung berapa banyak koreksi yang harus dilakukan, dan mengeluarkan sinyal koreksi sesuai dengan hasil perhitungannya.

1.3 Klasifikasi Sistem Pengaturan

Sistem kontrol digunakan hamper di semua bidang di kehidupan manusia di era modern saat ini. Oleh karena itu banyak sekali klasifikasi sistem kontrol yang didefinisikan. Walaupun begitu, secara umum paling tidak ada 3 jenis sistem kontrol yang dapat diklasifikasikan. Klasifikasi sistem kontrol tersebut adalah sebagai berikut:

1. Sistem Kontrol Manual dan Sistem Kontrol Otomatis

    Sistem kontrol manual adalah suatu sistem kontrol dimana faktor manusia sangat dominan dalam aksi pengendalian yang dilakukan pada sistem tersebut. Peran manusia sangat dominan dalam menjalankan perintah, sehingga hasil pengendalian akan dipengaruhi pelakunya. Model sistem pengendalian level cairan secara manual dapat dilihat pada Gambar 1.1.



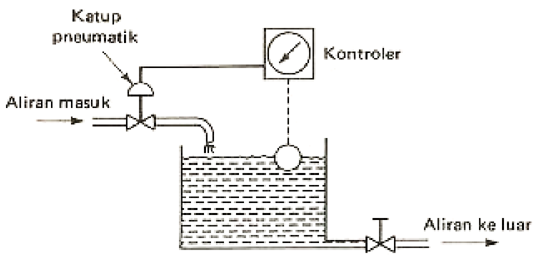
Gambar 1.1 Sistem Pengendalian Secara Manual

Pada sistem kendali level cairan secara manual, tangan manusia berfungsi untuk mengatur permukaan fluida dalam tangki. Permukaan fluida dalam tangki bertindak sebagai masukan, sedangkan penglihatan bertindak sebagai sensor.

Operator berperan membandingkan tinggi sesungguhnya saat itu dengan tinnggi permukaan fluida yang dihendaki dan kemudian bertindak untuk membuka atau menutup katup sebagai aktutator guna mmempertahankan keadaan permukaan yang diinginkan.

Sistem kontrol otomatis adalah sistem kontrol dimana dalam aksi pengendalian yang dilakukan pada sistem tersebut. Peran manusia digantikan oleh sistem kontroler yang telah diprogram secara otomatis sesuai fungsinya, sehingga bisa memerankan seperti yang dilakukan manusia.

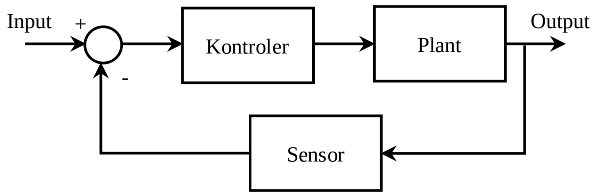
Di dunia industri modern banyak sekali sistem ken dali yang memanfaatkan kontrol otomatis, apalagi untuk industri yang bergerak pada bidang yang proses yang membahayakan keselamatan jiwa manusia. Model sistem pengendalian level cairan secara otomatis dapat dilihat pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Sistem Pengendalian Secara Otomatis

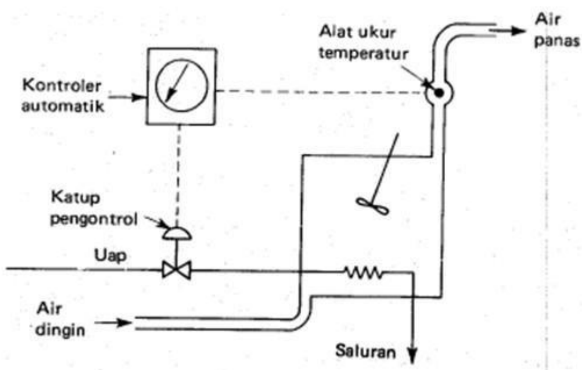
2. Sistem Kontrol Loop Terbuka (Open Loop) dan Sistem Kontrol Loop Tertutup (Closed Loop)

Sistem kontrol loop tertutup adalah sistem kontrol yang sinyal keluarannya mempunyai pengaruh langsung terhadap aksi pengendaliannya. Dengan kata lain sistem kendali loop tertutup adalah sistem kendali berumpan-balik. Sinyal kesalahan penggerak akan diumpankan ke elemen kendali untuk memperkecil kesalahan dan membuat agar keluaran sistem mendekati harga yang diinginkan. Dalam diagram blok, sistem kontrol loop tertutup dapat dilihat pada Gambar 1.3 di bawah ini.



Gambar 1.3 Sistem Kontrol Loop Tertutup

Sinyal kesalahan penggerak ini merupakan selisih antara sinyal masukan dan sinyal umpan-balik dimana dapat berupa sinyal keluaran atau suatu fungsi sinyal keluaran dan turunannya). Hal ini berarti bahwa pemakaian aksi umpan-balik pada loop tertutup bertujuan untuk memperkecil kesalahan sistem.



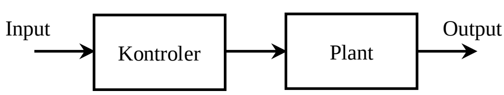
Gambar 1.4 Sistem Termal

Banyak sistem kontrol loop tertutup yang dapat dijumpai dalam industri dan kehidupan sehari-hari. Beberapa contoh adalah sistem lemari es, sistem pemanas air otomatis, dan sistem pemanas ruangan automatis dengan kontrol termostatik. Di bawah ini merupakan salah satu contoh pemakaian sistem kontrol loop tertutup adalah sistem kontrol pada sistem termal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.4.

Pada Gambar 1.4 terlihat bahwa posisi penunjuk pada kontroler automatik berfungsi untuk menyetel suhu atau temperatur yang diinginkan. Kemudian untuk suhu atau temperatur air yang sebenarnya diukur menggunakan alat ukur temperatur. Setelah itu, kontroler akan membandingkan antara temperatur yang diinginkan dengan temperatur air yang sebenarnya. Perbandingan kedua parameter tersebut membangkitkan sinyal kesalahan penggerak.

Selanjutnya, sinyal kesalahan ini akan diubah menjadi sinyal kontrol yang diperkuat oleh kontroler yang memiliki satuan yang sama dengan masukan transduser, dimana transduser pada sistem ini adalah katup pengontrol. Sinyal ini selanjutnya akan memutar katup untuk mengoreksi temperatur air yang sebenarnya dimana sebanding dengan besar sinyal kontrol yang dihasilkan oleh kontroler automatik.

Sistem kontrol loop terbuka adalah sistem kontrol yang keluarannya tidak terpengaruh pada aksi pengontrolan. Jadi, keluaran tidak diukur atau diumpan balikan untuk dibandingkan dengan masukan. Dalam diagram blok, sistem kontrol loop terbuka dapat dilihat pada Gambar 1.5 di bawah ini.



Gambar 1.5 Sistem Kontrol Loop Terbuka

Selain sistem kontrol loop tertutup, sistem kontrol loop terbuka juga sering dipakai dalam kehiduapan sehari-hari. Beberapa contoh penggunaan sistem kontrol loop terbuka adalah sistem mesin cuci. Pada mesin cuci, sistem tidak mengukur sinyal keluaran seperti kebersihan pakaian.

Gambar 1.5 menunjukkan hubungan masukan keluaran untuk sistem kontrol lup terbuka. Jika terdapat gangguan yang berasal dari luar sistem, sistem kontrol loop terbuka tidak dapat bekerja seperti yang diinginkan. Kontrol loop terbuka dapat dikerjakan hanya jika hubungan antara masukan dan keluaran diketahui dan tidak terdapat gangguan internal maupun eksternal.

Perbandingan antara sistem kontrol loop tertutup dengan terbuka, kelebihan dari kontrol loop tertutup adalah dengan adanya penggunaan umpan balik yang membuat respon sistem relatif kurang peka terhadap gangguan eksternal dan perubahan internal pada parameter sistem. Jadi dengan menggunakan komponen yang relatif kurang teliti dan murah kita dapat mendapatkan pengontrolan plant dengan dengan teliti.

Dari segi kestabilan, kontrol loop terbuka lebih mudah dibuat. Kestabilan selalu menjadi persoalan pada sistem loop tertutup karena cenderung terjadi kesalahan akibat koreksi berlebih yang dapat menimbulkan osilasi pada amplitude baik konstan ataupun tidak.

Sistem dengan masukan yang telah diketahui dan tidak ada gangguan lebih baik menggunakan sistem kontrol loop terbuka, sedangkan sistem loop tertutup lebih baik digunakan apabila terdapat gangguan yang tidak dapat diramalkan pada komponen sistem.

3. Sistem Kontrol Kontinu dan Diskrit

Sistem kontrol kontinu atau analog merupakan sistem kontrol yang dibagi menjadi beberapa bagian yaitu sebagai berikut:

a. Proporsional

Sistem kontrol yang menggunakan kendali proporsional ini memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Jika nilai konstanta proporsional kecil, pengontrol proporsional hanya mampu melakukan koreksi kesalahan yang kecil, sehingga akan

menghasilkan respon sistem yang lambat (menambah *rise time*).
2. Jika nilai konstanta proporsional dinaikkan, respon/tanggapan sistem akan semakin cepat mencapai keadaan mantapnya (mengurangi *rise time*).
3. Namun jika nilai konstanta proporsional diperbesar sehingga mencapai harga yang berlebihan, akan mengakibatkan sistem bekerja tidak stabil atau respon sistem akan berosilasi.
4. Nilai konstanta proporsional dapat diset sedemikian sehingga mengurangi *steady state error*, tetapi tidak bisa menghilangkannya.

b. Diferensial

Sistem kontrol yang menggunakan kendali diferensial ini memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Pengontrol tidak dapat menghasilkan keluaran jika tidak ada perubahan pada masukannya (berupa perubahan sinyal kesalahan)
2. Jika sinyal kesalahan berubah terhadap waktu, maka keluaran yang dihasilkan pengontrol tergantung pada nilai konstanta diferensial dan laju perubahan sinyal kesalahan.
3. Pengontrol diferensial dapat menghasilkan koreksi yang signifikan sebelum pembangkit kesalahan menjadi sangat besar. Jadi pengontrol diferensial dapat mengantisipasi pembangkit kesalahan, memberikan aksi yang bersifat korektif dan cenderung meningkatkan stabilitas sistem.
4. Dengan meningkatkan nilai konstanta diferensial, dapat meningkatkan stabilitas sistem dan mengurangi *overshoot*.

c. Integral

Sistem kontrol yang menggunakan kendali integral ini memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Keluaran pengontrol integral membutuhkan selang waktu tertentu, sehingga pengontrol integral cenderung memperlambat respon.
2. Ketika sinyal kesalahan berharga nol, keluaran pengontrol akan bertahan pada nilai sebelumnya.
3. Jika sinyal kesalahan tidak berharga nol, keluaran akan menunjukkan kenaikan atau penurunan yang dipengaruhi oleh besarnya sinyal kesalahan dan nilai konstanta integral.
4. Konstanta integral konstanta integral yang berharga besar akan mempercepat hilangnya *offset*. Tetapi semakin besar nilai konstanta konstanta integral akan mengakibatkan peningkatan osilasi dari sinyal keluaran pengontrol.

Sistem kontrol diskontinu atau diskrit merupakan sistem kontrol yang dibagi menjadi beberapa bagian yaitu sebagai berikut:

a. Pengendalian dengan Dua Posisi

Pengendalian dengan dua posisi adalah pengendalian dengan memanfaatkan dua kondisi on dan off. Pengendalian ini menghasilkan sinyal yang berosilasi. Contoh penggunaan pengendalian dengan dua posisi yaitu relay, termostat, level, saklar ON/OFF dan lain-lain.

b. Pengendalian dengan Posisi Ganda

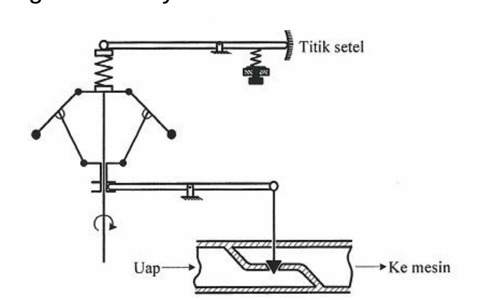
Pengendalian dengan posisi ganda adalah pengendalian yang memperbaiki kelemahan pengendalian dengan dia posisi yang menghasilkan sinyal osilasi. Contoh penggunaan pengendalian dengan posisi ganda yaitu saklar pemilih (selector switching) dan lain-lain.

1.4 Contoh Penggunaan Ilmu Sistem Pengaturan

Ilmu kontrol telah diterapkan hamper di semua sistem mekanis dan elektris. Beberapa contoh penggunaan ilmu kontrol pada sistem dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. Sistem Kendali Kecepatan Gerak Mesin Menggunakan Prinsip Governor Watt

   Prinsip dasar dari Governor James Watt untuk mesin uap dilukiskan dengan diagram skematik pada Gambar 1.6. Besarnya laju aliran uap yang masuk ke silinder mesin diatur sesuai dengan selisih antara kecepatan mesin yang diinginkan dan kecepatan mesin yang sebenarnya.



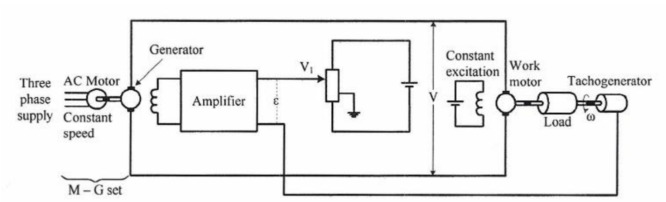
Gambar 1.6 Prinsip Governor Watt

Urutan langkah dari aksi pengendalian kecepatan mesin ini diawali dengan masukan acuan (titik setel) yang diset sesuai dengan kecepatan yang diinginkan. Jika kecepatan yang terjadi turun di bawah harga yang diinginkan, maka gaya sentrifugal dari governor kecepatan mengecil, menyebabkan katup pengontrol bergerak ke atas, mencatu uap yang lebih banyak sehingga kecepatan mesin membesar sampai dicapai harga yang diinginkan.

Sebaliknya, jika kecepatan mesin melebihi harga yang diinginkan, maka gaya sentrifugal dari governor kecepatan membesar, menyebabkan katup pengontrol bergerak ke bawah. Hal ini akan memperkecil catu uap sehingga kecepatan mesin mengecil sampai mencapai harga yang diinginkan.

2. Sistem Kendali Kecepatan Gerak Mesin Menggunakan Prinsip Ward-Leonard

Sistem ini terdiri dari motor 3 pase berkecepatan konstan yang berfungsi sebagai penggerak mula sebuah generator DC (motor-generator set) guna mencatu daya motor pengatur kecepatan (work motor). Susunan sistem tersebut dalam bentuk loop tertutup ditunjukan pada Gambar 1.7 berikut ini.



Gambar 1.7 Prinsip Ward-Leonard

Motor induksi 3 pase memutar generator dengan kecepatan konstan, sehingga tegangan armatur generator V akan sebanding dengan fluksi medannya. Dengan kata lain, tegangan naik maka fluksinya turun, Putaran fluksi yang terjadi sangat tergantung pada tegangan kesalahan pada terminal masukan amplifier. Untuk pendekatan yang pertama kita abaikan dulu efek beban dan efek jenuh, sehingga tegangan armatur generator menjadi:

$$V \sim \varepsilon \qquad (1.1)$$

Mengingat eksitasi dari motor yang dikendalikan konstan, maka fluksinya juga konstan, dalam hal ini:

$$\omega \sim V \qquad (1.2)$$

Kombinasi kedua persamaan di atas akan menunjukkan bahwa:

$$\omega \sim \varepsilon \qquad (1.3)$$

Untuk membalik arah putaran poros motor yang dikendalikan cukup dengan menukar polaritas tegangan referensi kecepatan VI. Penukaran polaritas tegangan dan arus yang dibangkitkan akan menyebabkan terjadinya pembalikkan torsi motor yang dikendalikan (work motor).

Melihat susunan atau konstruksi sistem kendali kecepatan metode WardLeonard ini pada dasarnya tidak dapat dipisahkan dari prinsip pengereman terulang. Apabila sinyal referensi dikurangi tegangan generator akan turun, tetapi kecepatan motor (dan ggl lawan) untuk waktu yang pendek di dalam beban masih tersimpan energi.

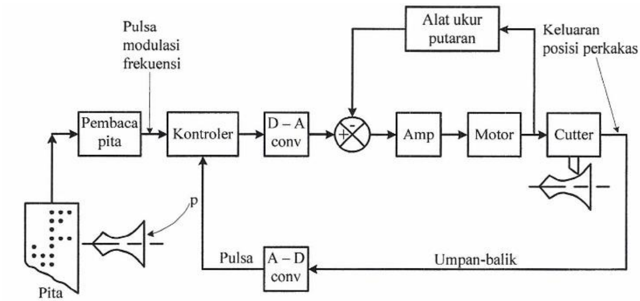
Untuk sesaat ggl lawan motor relative lebih tinggi dari tegangan generator, sedang arah arus pada kedua armatur meşin dc membalik dan menyebabkan motor yang dikendalikan berubah menjadi generator yang diputar oleh energi yang tersimpan di beban.

Generator dc tersebut kini beroperasi sebagai motor, memutar motor ac yang beroperasi sebagai generator dan mengembalikan daya ke sumber catu daya utama. Dengan adanya pengereman balik ini akan menghasilkan putaran motor yang tidak halus (tersendat-sendat).

3. Sistem Kendali Numerik

Sistem kendali numerik adalah suatu metode pengendalian gerak dari komponen meşin dengan menggunakan angka-angka. Pada kendali numerik, gerak benda kerja dapat dikendalikan dengan informasi biner yang tersimpan pada sebuah pipa.

Pada sistem kendali semacam itu, harga-harga numerik simbolik diubah ke dalam besaran fisik oleh sinyal listrik yang diterjemahkan ke dalam pergerakan linear atau sirkuler. Sinyal tersebut dapat berupa sinyal digital (pulsa) atau analog (tegangan yang berubah terhadap waktu). Prinsip kerja dari sistem yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.



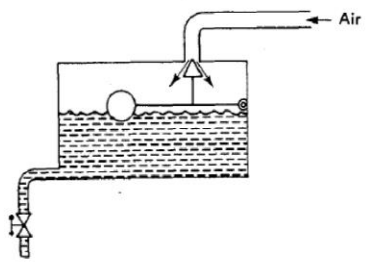
Gambar 1.8 Sistem Kendali Numerik

Sebuah pita disiapkan dalam bentuk biner yang menyatakan bagian "P” yang diinginkan. Untuk menjalankan sistem, pita diumpankan ke pembaca pita (sensor). Dibandingkan dengan sinyal pulsa umpan-balik. D/A konverter mengubah pulsa-pulsa tersebut menjadi sinyal analog (tegangan tertentu) kemudian memutar motor servo. Posisi pemotong (pahat) dikendalikan sesuai dengan masukan motor servo.

Transduser yang dipasang pada pemotong mengubah gerakannya menjadi sinyal listrik yang selanjutnya diubah menjadi pulsa-pulsa oleh AD konventer. Sinyal ini kemudİan dibandingkan dengan sinyal pulsa masukan. Kontroler melakukan operasi matematik untuk menghitung selisih antara sinyal-sinyal pulsa tersebut. Kelebihan dari sistem tersebut adalah dapat diproduksinya bagian-bagian mesin yang kompleks dengan toleransi yang merata pada kecepatan pengerjaan maksimum.

1.5 Latihan

1. Jelaskan komponen-komponen dasar yang diperlukan di dalam sistem kendali!
2. Jelaskan kelebihan dan kekurangan dari sistem kontrol loop tertutup dan sistem kontrol loop terbuka!
3. Berikan 3 contoh alat yang termasuk sistem kontrol loop tertutup dan sistem kontrol loop terbuka dan jelaskan prinsip kerjanya!
4. Gambar 1.9 menunjukkan sistem kontrol keran air yang bersifat self-operated. Jelaskan prinsip kerjanya!



Gambar 1.9 Sistem Kontrol Keran Air

5. Gambarlah diagram blok sebuah thermostat! Sebutkan beberapa gangguan yang mungkin timbul dalam sistem ini!

BAB 2.
TRANFORMASI LAPLACE

2.1 Pendahuluan

Metode matematika adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan masalah-masalah fisis yang dimodelkan oleh persamaan diferensial biasa atau parsial. Salah satu metode yang digunakan ialah transformasi Laplace. Transformasi Laplace ini ditemukan oleh Pierre-Simon Marquis de Laplace.

Pierre-Simon Marquis de Laplace, seorang ahli matematika dan astronom yang lahir pada tanggal 23 Maret 1749 di Beaumont-en-Auge, Normandia tepatnya di distrik Calvados. Laplace dilahirkan dikeluarga yang sederhana di Prancis. Ayahnya bernama Pierre Laplace dan ibunya bernama Marie-Anne Sochon yang berasal dari Tourgeville.

Gambar 2.1 Pierre-Simon Marquis de Laplace

Laplace cenderung menutupi masa kecilnya karena dia malu dengan kasta kedua orang tuanya sebagai petani. Banyak rincian tentang kehidupan Laplace hilang ketika rumah keluarga chateau terbakar pada tahun 1925. Menurut WW Rouse Ball (Sejarah matematika edisi 4 1908), ia adalah anak seorang petani kecil atau mungkin sebuah peternakan. Sangat sedikit yang diketahui dari tahun-tahun awalnya. Orang tuanya adalah dari keluarga yang bahagia.

Keluarga Laplace terlibat dalam dunia pertanian setidaknya sampai tahun 1750 dan Pierre Laplace juga seorang pedagang dari kota Beaumont. Laplace untuk pertama kalinya belajar matematika di akademi militer di Beaumont. Pada saat Laplace berumur 18 tahun tepatnya pada tahun 1767, dia meneruskan sekolahnya di Caen, Paris. Dengan rasa percaya diri yang tinggi, dia bertekad untuk menaklukan dunia matematika.

Di Universitas Caen, selama dua tahun laplace menunjukkan kemampuannya dibidang matematika. Dia dikenal sebagai seorang mahasiswa yang pandai sehingga dia diangkat menjadi asisten dosen. Memperoleh pujian dari dua dosen matematika di Universitas Caen, Christophe Gadbled dan P. Le Canu yang sebenarnya tidak banyak mengetahui Laplace kecuali sekedar mengetahui bahwa Laplace mempunyai potensi menjadi seorang matematikawan besar.

Banyak penemuan Laplace yang menjadi panutan didunia matematika. Penemuannya antara lain adalah di bidang integral kalkulus, diferensial terbatas (limit), persamaan diferensial dan astronomi. Ia juga menemukan Mekanika selestial, evakuasi Laplace, operator Laplace dan transformasi Laplace.

Transformasi Laplace adalah suatu teknik untuk menyederhanakan permasalahan dalam suatu sistem yang mengandung masukan dan keluaran, dengan melakukan transformasi dari suatu domain pengamatan ke domain pengamatan yang lain. Transformasi Laplace memanfaatkan integral tak wajar.

Konsep integral tak wajar dan kekonvergenannya dibutuhkan untuk mempelajari transformasi Laplace. Transformasi Laplace banyak digunakan dalam meyelesaikan masalah nilai awal suatu persamaan diferensial biasa dan masalah-masalah syarat batas khususnya transformasi Laplace sangat ampuh untuk menyelesaikan persamaan gelombang dan persamaan panas dimensi satu.

Dalam matematika jenis transformasi ini merupakan suatu konsep yang penting sebagai bagian dari analisa fungsional yang dapat membantu dalam melakukan analisa sistem invarian-waktu linier, seperti rangkaian elektronik, osilator harmonik, devais optik dan sistem-sistem mekanik.

Dengan mengetahui deksripsi matematika atau fungsional sederhana dari masukan atau keluaran suatu sistem, transformasi Laplace dapat memberikan deskripsi funsional alternatif yang kadang dapat menyederhanakan proses analisa kelakukan dari sistem atau membuat suatu sistem baru yang berdasarkan suatu kumpulan spesifikasi. Dalam sistem fisik sebenarnya transformasi Laplace sering dianggap sebagai suatu transformasi dari cara pandang domain-waktu, di mana masukan dan keluaran dimengerti sebagai fungsi dari waktu, ke cara pandang domain-frekuensi, di mana masukan dan keluaran yang sama dipandang sebagai fungsi dari frekuensi angular kompleks, atau radian per satuan waktu.

Transformasi ini tidak hanya menyediakan cara mendasar lain untuk mengerti kelakukan suatu sistem, tetapi juga secara drastis mengurangi kerumitan perhitungan matematika yang dibutuhkan dalam menganalisa suatu sistem. Transformasi Laplace memiliki peran penting dalam aplikasi-aplikasi dalam bidang fisika, optik, rekayasa listrik, rekayasa kendali, pemrosesan sinyal dan teori kemungkinan.

Selain itu, manfaat dari transformasi laplace adalah menyelesaikan persamaan diferential linear. Dengan mengunakan transformasi laplace, kita dapat mengubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoidal, fungsi sinusoidal teredam, fungsi exponensial menjadi aljabar variable kompleks menjadi persamaan yang lebih sederhana.

2.2 Transformasi Laplace

Dalam menguasai transformasi laplace maka diperlukan pemahaman terlebih dahulu mengenai definisi matematis mengenai transformasi laplace. Berikut ini dijabarkan mengenai definisi matematis transformasi laplace.

2.2.1 Definisi

Misalkan $F(t)$ suatu fungsi t dan t > 0, maka transformasi Laplace dari $F(t)$ dinotasikan dengan $L\{F(t)\}$ yang didefinisikan oleh:

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt = f(s)$$

Karena $L\{F(t)\}$ adalah integral tidak wajar dengan batas atas di tak hingga (∞) maka

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt = f(s)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^{p} e^{-st} F(t)dt$$

Transformasi Laplace dari F(t) dikatakan ada, jika integralnya konvergen untuk beberapa nilai s, bila tidak demikian maka transformasi Laplace tidak ada.

Selanjutnya bila suatu fungsi dari t dinyatakan dengan huruf besar, misalnya W(t), G(t), Y(t) dan seterusnya, maka transformasi Laplace dinyatakan dengan huruf kecil yang bersangkutan sehingga L {W(t)} = w(s), L {G(t)} = g(s), L {Y(t)} = y(s) dan seterusnya.

Jika F(t) adalah fungsi yang kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \le t \le$ N dan eksponensial berorde γ untuk t > N, maka transformasi Laplace f(s) ada untuk setiap s > γ. Berdasarkan definisi di atas, dapat ditentukan transformasi Laplace beberapa fungsi sederhana.

Tabel 2.1 Transformasi Laplace Beberapa Fungsi Sederhana

No.	$F(t)$	$L\{F(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$

3.	t^2	$\frac{2}{s^3}, s > 0$
4.	t^n n = 0,1,2,3,….	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > 0$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
7.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
8.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > \lvert a \rvert$
9.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > \lvert a \rvert$
10.	$t \cos at$	$\frac{s^2-a}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$

Beberapa penjabaran mengenai proses perhitungan fungsi sederhana ditunjukkan sebagai berikut:

1. Fungsi Unit Step ($F(t) = 1$)

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty`} e^{-st} 1 = f(s)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{se^{-\infty}} + \frac{1}{se^{0}}\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

2. Fungsi Linier ($F(t) = t$)

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty`} e^{-st}t\ dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p t.-\frac{1}{s}d\left(e^{-st}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{p\to\infty} te^{-st} - \int_0^p e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[te^{-st} + \frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^p$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[pe^{-sp} + \frac{1}{s}e^{-sp}\right]-\left[0e^{0} + \frac{1}{s}e^{0}\right]_0^p$$

$$= -\frac{1}{s}\left[(0+0)-\left(0+\frac{1}{s}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

3. Fungsi Eksponensial ($F(t) = e^{at}$)

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty`} e^{-st} t\ e^{at} dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-a} \lim_{p\to\infty} \left[e^{-(s-a)t}\right]_0^p$$

$$= \frac{1}{-(s-a)} \lim_{p\to\infty} \left[\frac{1}{e^{(s-a)\infty}} - \frac{1}{e^{(s-a)0}}\right]$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

4. Fungsi Sinus ($F(t) = \sin at$)

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ \sin \text{at}\, dt$$

$$= \underset{p\to\infty}{Lim} \int_0^p e^{-st}\ -\frac{1}{a} d(\cos at)$$

$$= \underset{p\to\infty}{Lim} \left(-\frac{1}{a} \cos at.e^{-st}\ + \int_0^{\infty} \frac{1}{a} \cos atd(e^{-st})\right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} + \int_p^{\infty} -\frac{s}{a}\cos at.e^{-st}\,dt \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}.\frac{1}{a}d(\sin at) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} - \frac{s}{a^2}(e^{-st}\sin at - \int_0^p \sin at.d(e^{-st})) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} - \frac{s}{a^2}(e^{-st}\sin at - \int_0^p \sin at.-se^{-st}) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} - \frac{s}{a^2}e^{-st}\sin at - \frac{s^2}{a^2}\int_0^p \sin at.se^{-st}) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\frac{a^2}{a^2+s^2}\left(-\frac{1}{a}\cos at.e^{-st} - \frac{s}{a^2}\sin at.e^{-st} \right)_0^p$$

$$= \frac{a^2}{a^2+s^2}\left(-\frac{\cos at}{a.e^{st}} - \frac{s.\sin at}{a^2.e^{st}} \right)$$

$$= \frac{a^2}{a^2+s^2}\left((0-0) - \left(-\frac{1}{a} - 0 \right) \right)$$

$$= \frac{a^2}{a^2+s^2}\left(\frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{a}{a^2+s^2}$$

5. Fungsi Cosinus ($F(t) = \cos at$)

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \text{at}\, dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st} \frac{1}{a} d(\sin at)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} - \int_0^\infty \frac{1}{a} \sin atd(e^{-st}) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} + \int_p^\infty \frac{s}{a} \sin at.e^{-st} dt \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} + \frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-st} . \frac{1}{a} d(-\cos at) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} + \frac{s}{a^2} (e^{-st} (-\cos at) - \int_0^p -\cos at.d(e^{-st}) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} - \frac{s}{a^2} (e^{-st} \cos at) + \int_0^p \cos at. - se^{-st} dt) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} - \frac{s}{a^2} (e^{-st} \cos at) - \frac{s^2}{a^2} \int_0^p \cos at.e^{-st}) \right)_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{a^2}{s^2 + a^2} \left(\frac{1}{a} \sin at.e^{-st} - \frac{s}{a^2} \cos at.e^{-st} \right)_0^p$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\left(\frac{\sin at}{a.e^{st}} - \frac{s.\cos at}{a^2.e^{st}}\right)$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\left((0-0)-\left(0-\frac{s}{a^2}\right)\right)$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\left(\frac{s}{a^2}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

Jika F(t) adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde γ untuk t > N, maka transformasi Laplacenya f(s) ada untuk semua s > γ.

Perlu ditekankan bahwa persyaratan-persyaratan yang dinyatakan adalah CUKUP untuk menjamin bahwa transformasi Laplace-nya ada. Akan tetapi transformasi Laplace dapat ada atau tidak walaupun persyaratan ini tidak dipenuhi.

2.2.2 Metode Transformasi Laplace

Untuk memudahkan bagi pengguna matematika, terdapat beberapa cara yang digunakan untuk menentukan transformasi Laplace. Cara tersebut adalah:

a. Metode langsung, berkaitan dengan definisi.

Metode ini berkaitan langsung dengan definisi

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st} F(t)dt$$

Contoh:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st} t dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p t.-\frac{1}{s} d(e^{-st})$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p\to\infty} te^{-st} - \int_0^p e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p\to\infty} \left[te^{-st} + \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^p$$

$$= -\frac{1}{s} \left[0 - \frac{1}{s} \right]$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

b. Metode Deret

Misal F(t) mempunyai uraian deret pangkat yang diberikan oleh:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Maka transformasi Laplacenya dapat diperoleh dengan menjumlahkan transformasi setiap sukunya dalam deret, sehingga:

$$L\{F(t)\} = L\{a_0\} + L\{a_1 t\} + L\{a_2 t^2\} + L\{a_3 t^3\} + \ldots$$

$$= \frac{a_o}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \ldots$$

$$= \sum_{n+0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

syarat ini berlaku jika deretnya konvergen untuk s > γ

c. *Metode Persamaan Differensial*

Metode ini menyangkut menemukan persaman differensial yang dipenuhi oleh F(t) dan kemudian menggunakan teorema-teorema di atas.

d. *Menggunakan Tabel-Tabel*

Metode ini menggunakan penelusuran rumus yang sudah ditetapkan.

2.2.3 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi mempunyai beberapa sifat, sifat-sifat tersebut antara lain:

a. Sifat Linear

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, sedangkan $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplace masing-masing $f_1(s)$ dan $f_2(s)$, maka:

$$L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f(s)$$

Bukti:

$$L\{c_1 F(t) + c_2 F_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} c_1 F_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} c_1 F_2(t)dt$$

$$= c_1 \int_0^p e^{-st} F_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} F_2(t)dt$$

$$= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

Contoh Pemakaian Sifat Linier:

1. $L\{5t-3\} = L\{5t-3a\} = L\{5t\} - L\{3\}$

$$= 5L\{t\} - 3L\{1\}$$

$$= 5\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s}$$

$$= \frac{5}{s^2} - \frac{3}{s}$$

2. $L\{6\sin 2t - 5\cos 2t\} = L\{6\sin 2t\} - L\{5\cos 2t\}$

$$= 6L\{\sin 2t\} - 5L\{\cos 2t\}$$

$$= 6\frac{2}{s^2+4} - 5\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{12-5s}{s^2+4}$$

3. $L\{(t^2+1)^2\} = L\{t^4 + 2t^2 + 1\}$

$$= L\{t^4\} + L\{2t^2\} + L\{1\}$$

$$= L\{t^4\} + 2L\{t^2\} + L\{1\}$$

$$= \frac{4!}{s^{4+1}} + 2\left(\frac{2!}{s^{2+1}}\right) + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{24}{s^5} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s}$$

4. $L\{4e^{5t} + 6t^2 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$

$$= L\{4e^{5t}\} + L\{6t^2\} - L\{3\sin 4t\} + L\{2\cos 2t\}$$

$$= 4L\left\{e^{5t}\right\} + 6L\left\{t^2\right\} - 3L\left\{\sin 4t\right\} + 2L\left\{\cos 2t\right\}$$

$$= 4\frac{1}{s-5} + 6\frac{2}{s^3} - 3\frac{4}{s^2+4} + 2\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{4}{s-5} + \frac{12}{s^3} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}$$

b. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka:

$$L\{F(t)\} = f(s)\ maka\ L\{e^{2t}F(t)\} = f(s-a)$$

Bukti:

Karena $L\{F(t)\} = \int_0^{\infty`} e^{-st}F(t)dt = f(s)$, maka

$$L\{e^{at}F(t)\} = \int_0^{\infty`} e^{-st}e^{at}F(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt$$

$$= f(s-a)$$

Contoh Pemakaian Sifat Pergeseran Pertama:

1. Tentukan $L\{e^{-3t}F(t)\}\ jika\ L\{F(t)\} = f(s)$

Menurut sifat 2 di atas, $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$

Maka $L\{e^{-3t}F(t)\} = f\big(s-(-3)\big)$

$= f(s+3)$

2. Tentukan $L\{e^{2t}F(t)\},\ jika\ L\{F(t)\} = f\left(\frac{s}{a}\right)$

Menurut sifat 2 di atas, $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$

Karena

$$L\{F(t)\} = f\left(\frac{s}{a}\right), maka\ L\{e^{2t}F(t)\} = f\left(\frac{s-2}{a}\right)$$

$$= f\left(\frac{s}{a} - \frac{2}{a}\right)$$

3. Tentukan $L\{e^{-t}F(t)\}\ jika\ L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$

Karena $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$ maka menurut sifat translasi pertama:

$$L\{e^{-t}F(t)\} = f(s+1)$$

$$L\{e^{-t}F(t)\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

4. Tentukan $L\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$

Menurut sifat linear,

$$L\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = L\{e^{-2t}(3\cos 6t)\} - L\{e^{-2t}(5\sin 6t)\}$$

$$= 3L\{^{-2t}\cos 6t\} - 5L\{e^{-2t}\sin 6t\}$$

Karena $L\{\cos 6t\} = \dfrac{s}{s^2+36}$ *dan* $L\{\sin 6t\} = \dfrac{6}{s^2+36}$

maka menurut sifat translasi

$$3L\{^{-2t}\cos 6t\} = 3f(s+2)$$

$$= 3\frac{(s+2)}{(s+2)^2+36},$$

dan

$$5L\{^{-2t}\sin 6t\} = 5\frac{6}{(s+2)^2+36}$$

sehingga

$$L\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = 3\frac{(s+2)}{(s+2)^2+36} - 5\frac{6}{(s+2)^2+36}$$

$$= \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

c. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ dan $G(t) = \begin{cases} F(t-a), \, untuk \; t > a \\ 0, \, untuk \; t < a \end{cases}$

Maka:

$$L\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$$

Bukti:

$$L\{(G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}G(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a)dt$$

Misal u = t-a maka t = u+a dan du = dt, sehingga

$$\int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} F(u)du$$

$$= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u)du$$

$$= e^{-as} f(s)$$

Contoh Pemakaian Sifat Pergeseran Kedua:

Carilah $L\{F(t)\}$ jika $F(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}), t > \frac{2\pi}{3} \\ 0, t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Menurut definisi transformasi Laplace

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi/3} e^{-st}(0)dt + \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-st} \cos(t - 2\pi/3)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u du$$

$$= e^{-2\pi s/3} \int_0^{\infty} e^{-su} \cos u du$$

$$= \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$$

d. Sifat Pengubahan Skala

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

Bukti:

Karena

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

maka

$$L\{F(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt$$

Misal $u = at \; maka \; du = adt \; sehingga \; dt = \frac{du}{a}$

Menurut definisi $L\{F(at) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u\left(\frac{s}{a}\right)} F(u) \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u} F(u) du$$

$$= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$$

Contoh Pemakaian Sifat Pengubahan Skala:

Jika $L\{F(t)\} = \dfrac{6}{(s+2)^3} = f(s)$

maka $L\{F(3t)\} = \dfrac{1}{3} f(\dfrac{s}{3})$

$$= \frac{6}{3\left(\frac{s}{3}+2\right)^3}$$

$$= \frac{6.9}{(s+6)^3}$$

e. Transformasi Laplace dari Turunan

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$

Karena $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = f(s)$, maka

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$$

$$= \left(e^{-st} F(t) - \int_0^\infty F(t)d(e^{-st}) \right)_0^p$$

$$= -F(0) + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$= sf(s) - F(0)$$

Jika $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ maka: :

$$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(s)$$

Bukti:

$$L\{F''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F''(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} d(F'(t))$$

$$= \left(e^{-st} F'(t) - \int_0^\infty F'(t) d(e^{-st}) \right)$$

$$= \left(e^{-st} F'(t) + s\int_0^\infty F'(t) e^{-st} dt \right)$$

$$= \left(e^{-st} F'(t) + s(sf(s) - F(0)) \right)$$

$$= s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$L\{F'''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'''(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} d(F''(t))$$

$$= \left(e^{-st} F''(t) - \int_0^\infty F''(t) d(e^{-st}) \right)$$

$$= \left(e^{-st} F''(t) + s\int_0^\infty e^{-st} F''(t) dt \right)$$

$$= e^{-st}F''(t) + s\left(e^{-st}F'(t) - \int_0^\infty F'(t)d(e^{-st})\right)$$

$$= s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0)$$

Akhirnya dengan menggunakan induksi matematika dapat ditunjukkan bahwa, jika:

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

maka

$$L\{F^{(n)}(t)\} = sf(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - ... - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

Contoh Pemakaian Sifat Turunan:

Dengan menggunakan sifat transformasi Laplace dari turunan-turuan, tunjukkan bahwa:

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} = f(s)$$

Misal $F(t) = \sin at$ diperoleh:

$$F'(t) = a\cos at, F''(t) = -a^2 \sin at$$

sehingga $L\{\sin at\} = -\frac{1}{a^2} L\{F''(t)$

Dengan menggunakan sifat transformasi Laplace dari turunan-turunan diperoleh

$$L\{\sin at\} = \left(-\frac{1}{a^2}\right)\left(sf(s) - sF(0) - F'(0)\right)f$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(s^2 \frac{a}{s^2 + a^2} - s(0) - a \right)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{as^2}{s^2 + a^2} - a \right)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{as^2 - as^2 - a^3}{s^2 + a^2} \right)$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

f. Tansformasi Laplace dari Integral

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $L\left\{ \int_0^t F(u)du \right\} = \frac{f(s)}{s}$

Bukti:

Misal $G(t) = \int_0^t F(u)du$ maka $G'(t) = F(t)\ dan\ G(0) = 0$

Dengan mentransformasikan Laplace pada kedua pihak, diperoleh:

$$L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Leftrightarrow sL\{G(t)\} - G\{0\} = f(s)$$

$$\Leftrightarrow sL\{G(t)\} = f(s)$$

$$\Leftrightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$$

Jadi diperoleh $L\left\{ \int_0^t F(u)du \right\} = \frac{f(s)}{s}$

Contoh Pemakaian Sifat Integral:

Carilah $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}$

Misal $F(t) = \frac{\sin t}{t}$

Maka $L\{F(t)\} = \arctan\frac{1}{s}$

Sehingga menurut sifat transformasi di atas

$$L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} = \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$$

g. Perkalian dengan t ^{n}

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka:

$$L\{t^n F(t) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1) f^{(n)}(s)$$

Bukti:

Karena $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$ maka menurut aturan Leibnitz untuk menurunkan dibawah tanda integral, diperoleh:

$$\frac{df}{ds} = f'(s) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)dt$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st} F(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\{tF(t)\}dt$$

$$= -L\{tF(t)\}$$

Jadi $L\{tF(t)\} = -\dfrac{df}{ds} = -f'(s)$

Contoh Pemakaian Sifat Perkalian:

1. Tentukan $L\{t \sin at\}$

   $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, maka menurut sifat perkalian dari pangkat t ^{n} diperoleh

   $L\{tF(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n f(s)}{ds^n}$, sehingga

   $$L\{t \sin at\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)$$

   $$= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

2. Tentukan $L\{t^2 \cos at\}$

   Menurut sifat di atas, $L\{t^2 \cos at\} = (-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{s}{s^2 + a^2}\right)$

   $$= \frac{d}{ds}\left(\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right)$$

   $$= \frac{2s^3 - 6a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$$

h. Sifat Pembagian oleh t

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(u)du$

Bukti:

Misal $G(t) = \frac{F(t)}{t}$ maka $F(t) = tG(t)$

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace untuk kedua bagian, maka diperoleh bentuk

$L\{F(t)\} = L\{tG(t)\}\ atau\ f(s) = -\frac{d}{ds}L\{G(t)\}$ atau

$$f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan diperoleh:

$$\int f(s) = \int -\frac{dg}{ds}.$$

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)du$$

$$= \int_s^\infty f(u)du$$

Jadi $L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(u)du$

2.3 Transformasi Laplace Invers

Transformasi Laplace Invers atau biasa disebut transformasi laplace balik merupakan kebalikan dari transformasi laplace. Definisi transformasi Laplace Invers dijabarkan pada sub bab selanjutnya.

2.3.1 Definisi

Jika transformasi Laplace suatu fungsi F(t) adalah f(s), yaitu jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka F(t) disebut suatu transformasi Laplace Invers dari f(s). Secara simbolis ditulis $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$. L^{-1} disebut operator transformasi Laplace invers.

Contoh:

1. Karena $L\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$ maka $L^{-1}\left\{e^{2t}\right\} = \dfrac{1}{s-2}$

2. Karena $L\left\{\dfrac{s}{s^2+3}\right\} = \cos t\sqrt{3}e$ maka

   $L^{-1}\left\{\cos t\sqrt{3}\right\} = \dfrac{s}{s^2+3}$

3. Karena $L\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{\sinh at}{a}$ maka

   $L^{-1}\left\{\dfrac{\sinh at}{a}\right\} = \dfrac{1}{s^2-a^2}$

Misal N(t) adalah suatu fungsi dan L{N(t)} = 0 maka L{F(t)+N(t)} = L{F(t)} Dengan demikian dapat diperoleh dua fungsi yang berbeda dengan transformasi Laplace yang sama.

Contoh:

$$F_1(t) = e^{-3t} \text{ dan } F_2(t) = \begin{cases} 0 \; untuk \; t = 1 \\ e^{-3t} \;\; untuk \; t \neq 1 \end{cases}$$

Mengakibatkan $L^{-1}\{F_1(t)\} = L^{-1}\{F_2(t)\} = \dfrac{1}{s+3}$

Jika kita menghitung fungsi-fungsi nol, maka terlihat bahwa transformasi Laplace invers tidak tunggal. Akan tetapi apabila kita tidak dapat memperhitungkan fungsi-fungsi nol (yang tidak muncul dalam kasus-kasus fisika) maka ia adalah tunggal. Berdasarkan definisi di atas, dapat ditentukan transformasi Laplace invers beberapa fungsi sederhana dibawah ini.

Tabel 2.2 Tabel Tranformasi Laplace Invers

Nomor	**f(s)**	$L^{-1}\{f(x)\} = F(t)$
1.	$\dfrac{1}{s}$	1
2.	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}, n = 0,1,2,3,...$	$\dfrac{t^n}{n!}$
4.	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
6.	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$

8.	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
9.	$\dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$

2.3.2 Sifat Transformasi Laplace Invers

Beberapa sifat-sifat transformasi laplace adalah sebagai berikut:

1. Sifat Linier

Misal c_1 dan c_2 adalah sebarang bilangan konstanta, sedangkan $f_1(s)$ dan $f_2(s)$ berturut-turut adalah transformasi Laplace dari $F_1(t)$ dan $F_2(t)$, maka:

$$\begin{aligned} L^{-1}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} &= L^{-1}\{c_1F_1(t)\} + L^{-1}\{c_2F_2(t)\} \\ &= L^{-1}\{c_1F_1(t)\} + L^{-1}\{c_2F_2(t)\} \\ &= c_1L^{-1}\{F_1(t)\} + c_2L^{-1}\{F_2(t)\} \\ &= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \end{aligned}$$

Contoh Pemakaian Sifat Linier:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+9}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+9}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{12}{s^2+9}\right\} \\ &= 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - 12L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\ &= 3\cos 3t - 12\frac{\sin 3t}{3} \end{aligned}$$

2. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$

Contoh Pemakaian Sifat Pergeseran Pertama:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\} = \frac{\sinh 3t}{t}$ maka: :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2-2s+13}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+9}\right\} = e^{2t}\,\frac{\sinh 3t}{3}$$

3. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka

$$L^{-1}\{e^{as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a), \, untuk\ t > a \\ 0, \, untuk\ t < a \end{cases}$$

Contoh Pemakaian Sifat Pergeseran Kedua:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ maka

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2-9}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\frac{\pi}{3}), untuk\ t > \frac{\pi}{3} \\ 0, \, untuk\ t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4. Sifat Pengubahan Skala

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka $L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right)$

Contoh Pemakaian Sifat Pengubahan Skala:

Karena $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$ maka diperoleh

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{(3s)^2+1}\right\} = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

5. Transformasi Laplace Invers Turunan

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka:

$$L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds} f(s)\right\} = (1-)^n t^n F(t)$$

Contoh Pemakaian Sifat Turunan:

Karena $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ dan $\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{-4s}{(s^2+4)^2}$

maka diperoleh:

$$L^{-1}\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = (-1)^n t^n \sin 2t = -t \sin 2t$$

6. Transformasi Laplace Invers Integral

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka $L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t}$

Contoh Pemakaian Sifat Integral:

Karena $L^{-1}\left\{\frac{1}{3s(s+1)}\right\} = \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-t}$ maka

diperoleh $L^{-1}\left(\int_0^\pi \frac{1}{3u} - \frac{1}{3(u+1)}du\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)$`

7. Sifat Perkalian dengan s^n

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ maka $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$

Dengan demikian perkalian dengan s berakibat menurunkan F(t)
Jika :

f(t) $\neq 0$, sehingga

$$L^{-1}\{sf(s) - F(0)\} = F'(t)$$
$$\Leftrightarrow L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) - F(0)\delta(t)$$

dengan $\delta(t)$ adalah fungsi delta Dirac atau fungsi impuls satuan.

Contoh Pemakaian Sifat Perkalian:

Karena $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+25}\right\} = \sin 5t$ dan $\sin 5t = 0$ maka

$$L^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2+25}\right\} = \frac{d}{dt}(\sin 5t) = 5\cos 5t$$

8. Sifat Pembagian dengan s

Jika maka $L^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s}\right\} = \displaystyle\int_0^t F(u)du$

Jadi pembagian dengan s berakibat mengakibatkan integral F(t) dari 0 sampai dengan t.

Contoh Pemakaian Sifat Pembagian:

Karena $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ maka diperoleh

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \sin 2u\ du = \left(\frac{1}{2}\cos 2u\right)_0^t = \frac{1}{2}(\cos 2t - 1)$$

9. Sifat Konvulusi

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ dan $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ maka

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F*G$$

F*G disebut konvolusi atau faltung dari F dan G, dan teoremanya dinamakan teorema konvolusi atau sifat konvolusi.

Contoh Sifat Konvulusi:

Karena $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+4}\right\}=e^{-4t}$ dan $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$

maka diperoleh:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)(s-2)}\right\}=\int_0^t e^{-4u}e^{2(t-u)}du=e^{2t}+e^{-4t}$$

2.3.3 Metode Transformasi Laplace Invers

Dalam transformasi Laplace invers terdapat beberapa metode yang dapat digunakan yaitu antara lain:

1. Metode Pecahan Parsial

Setiap fungsi rasional $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, dengan P(s) dan Q(s) fungsi pangkat banyak (polinom) dan derajat P(s) lebih kecil dari Q(s). Selanjutnya $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ dapat ditulis jumlah dari fungsi rasional yang mempunyai bentuk:

$$\frac{A}{(as+b)^r}\ atau\ \frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}\ dan\ seterusnya,\ r=1,2,3,....$$

Dengan memperoleh transformasi Laplace invers tiap pecahan parcial maka dapat ditentukan $L^{-1}\left\{\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right\}$

Konstanta A, B, C, dapat diperoleh dengan menyelesaikan pecahan-pecahan dan menyamakan pangkat yang sama dari kedua ruas persamaan yang diperoleh atau dengan menggunakan metode khusus.

Contoh:

Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$

Jawab:

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{(s+2)(s-3)}\right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{3s+16}{(s+2)(s-3)}&=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}\\&=\frac{A(s-3)+B(s+2)}{s^2-s-6}\\&=\frac{(A+B)s+(2B-3A)}{s^2-s-6}\end{aligned}$$

atau A+B = 3 dan 2B-3A = 16 atau 2(3-A)–3A=16 sehingga didapat:

A = -2 dan B = 5

$$\begin{aligned}L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{(s+2)(s-3)}\right\}&=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s+2}+\frac{5}{s-3}\right\}\\&=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3}\right\}\\&=-2e^{-4t}+5e^{3t}\end{aligned}$$

2. Metode Deret

Jika f(s) mempunyai statu uraian dari kebalikan pangkat dari s yang diberikan oleh

$$f(s)=\frac{a_o}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\frac{a_3}{s^4}+\ldots$$

Maka dibawah persyaratan-persyaratan yang sesuai kita dapat menginversi suku demi suku untuk memperoleh

$$F(t)=a_o+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t}{3!}+\ldots$$

Contoh:

Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}\right\}$

Jawab

$$\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}\right\}=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!s^2}-\frac{1}{3!s^3}+\ldots\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\ldots\right\}$$

Sehingga $L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}s}}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\ldots\right\}$

$$=1-t+\frac{t^2}{1^2 2^2}-\frac{t^3}{1^2 2^2 3^2}+\ldots$$

3. Rumus Penguraian Heaviside

Andaikan P(s) dan Q(s) adalah fungsi pangkat banyak (polinom) dan derajat P(s) lebih kecil dari Q(s). Misal Q(s) mempunyai n akar-akar yang berbeda yaitu α_k , k= 1, 2, 3, 4, ..., n. Maka:

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

Bukti rumus di atas diuraikan sebagai berikut:

Karena Q(s) adalah polinomial dengan n akar berbeda α_1, α_2, α_3, ... , α_n maka menurut metode pecahan-pecahan parsial diperoleh

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \frac{A_n}{s-\alpha_n}$$ Dengan mengalikan kedua ruas dengan (s-α_k) dan mengambil s $\to \alpha_k$ dengan menggunakan aturan L'Hospital diperoleh

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} P(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\} \\ &= \lim_{s\to\alpha_k} P(s) \lim_{s\to\alpha_k}\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\} \\ &= P(\alpha_k). \lim_{s\to\alpha_k}\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\} \\ &= P(\alpha_k)\frac{1}{Q'(s)} \end{aligned}$$

Sehingga (1) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}.\frac{1}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\frac{1}{s-\alpha_k} + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{s-\alpha_n}$$

dengan demikian

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1}+\frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}.\frac{1}{s-\alpha_2}+...+\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}.\frac{1}{s-\alpha_k}+...+\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{s-\alpha_n}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_2}{Q'(\alpha_2)}.\frac{1}{s-\alpha_2}\right\}+....+L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_k}{Q'(\alpha_k}.\frac{1}{s-\alpha_k}\right\}+...+L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{s-\alpha_n}\right\}$$

$$=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\varepsilon_1)}.e^{\alpha_1 t}+\frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}.e^{\alpha_2 t}+...+\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}.e^{\alpha_k t}+...+\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.e^{\alpha_n t}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

4. Fungsi Beta

Jika m>0 dan n>0 didefinisikan fungsi beta sebagai

B(m,n) = $\int_0^1 u^{m-1}(1-n)^{n-1}du$ a dan kita dapat memperlihatkan sifat-sifat:

a. $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

2.4 Latihan

1. Dengan menggunakan sifat transformasi laplace, tentukan transformasi laplace dari fungsi berikut:
   a. $F(t)=2t^2+e^{-t}$ t
   b. $F(t)=6\sin 2t-\cos 2t$
   c. $F(t)=(\sin t-\cos t)^2$
   d. $F(t)=\cosh 3t-\dfrac{1}{2}\sinh t$
   e. $F(t)=2t+2\ ^{3}$

f. $F(t) = (\sin t - 3)^2$

g. $F(t) = e^{-t} \sin^2 t$

h. $F(t) = (1 + te^{-t})^3$

i. $F(t) =^{-t} (3\sinh 2t - 5\cosh 2t)$

j. $F(t) = (t+2)^2 e^t$

k. $F(t) = e^{2t}\left(\sinh 2t + \cosh 3t\right)$

l. $F(t) = e^{-\sqrt{t}}(1 + 2t)$

2. Hitunglah $L\{F(t)\}$ jika $F(t) = \begin{cases} (t-1)^2, t > 1 \\ 0, 0 < t < 1 \end{cases}$

3. Jika $L\{F(t)\} = \dfrac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$, carilah $L\{F(2t)\}$

4. Tentukan transformasi Laplace untuk fungsi yang diberikan
   1. $F(t) = t\cos 2t$
   2. $F(t) = t\sin 3t$
   3. $F(t) = t(3\sin 2t - 2\cos 5t)$
   4. $F(t) = t^2 \sin t$
   5. $F(t) = (t^2 - 3t + 2)\sin 3t$
   6. $F(t) = t^3 \cos t$
   7. $F(t) = t\sin^2 t$

5. Jika $F(t) = \begin{cases} t^2, 0 < t \leq 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$

   Carilah $L\{F''(t)\}$

6. Diketahui $F(t) = \begin{cases} 2t, 0 \leq t \leq 1 \\ t, t > 1 \end{cases}$

a. carilah $L\{F(t)\}$

b. carilah $L\{F'(t)\}$

c. apakah $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ berlaku untuk kasus ini

7. Tunjukkan bahwa $\int_0^\infty te^{-3t} \sin t\,dt = \dfrac{3}{50}$

8. Tunjukkan bahwa

$$L = \left(\int_0^t (u^2 - u + e^{-u})du \right) = \frac{1}{s} L\{t^2 - t + e^{-t}\}$$

9. Perlihatkan bahwa

a. $L\left\{ \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right\} = \ln \left| \dfrac{s+b}{s+a} \right|$

b. $L = \left\{ \dfrac{\cos at - \cos bt}{t} \right\} = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{s^2 + b^2}{s^2 + a^2} \right|$

10. Tunjukkan bahwa:

a. $L = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - u^{-u}}{u} du \right) = \dfrac{1}{s} \ln \left| 1 + \dfrac{1}{s} \right|$

b. Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka

$$L\left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F(u)du \right\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

11. Buktikan bahwa:

a. $L^{-1}\left\{ \dfrac{3s + 16}{s^2 - s - 6} \right\} = 5e^{2t} - 2e^{-2t}$

b. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s - 1}{s^3 - s} \right\} = 1 - \dfrac{3}{2} e^{-t} + \dfrac{1}{2} e^{t}$

c. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}=\dfrac{1}{2}e^{-t/2}-\dfrac{1}{2}e^{-2t/3}$

d. $L^{-1}\left\{\dfrac{11s^2-2+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}=5e^{2t}-\dfrac{3}{2}e^{t/2}+2e^{-t}$

e. $L^{-1}\left\{\dfrac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}=3e^{-4t}-3\cos(3t)$

f. $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2-16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}=\dfrac{1}{2}\sin(4t)+\cos(2t)-\sin(2t)$

g.

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}=\frac{1}{5}\left(4\cos t-3\sin t\right)-\frac{4}{5}e^{-3t}$$

12. Dengan menggunakan rumus penguraian Heaviside, tunjukkan bahwa:

a. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$

b. $L^{-1}\left\{\dfrac{19s+27}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$

c. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{(s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

d. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

BAB 3.
MODEL MATEMATIS SISTEM

3.1 Pendahuluan

Beberapa sistem dinamik, seperti mekanik, listrik, termal, hidraulik dan sebagainya dapat dikarakteristikan dengan persamaan diferensial. Persamaan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa hükum fısika yang berlaku pada sistem yang ditinjau, misalnya hükum Newton untuk sistem fısik, hükum Kirchhoff untuk sistem listrik dan sebagainya.

Deskripsi matematik dari karakteristik dinamik suatu sistem disebut model matematik. Langkah pertama dalam analisis suatu sistem dinamik adalah menurunkan modelnya terlebih dahulu. Model matematik tersebut dapat disajikan dalam bentuk yang berbeda, tergantung pada sistem beserta kondisi sekeliling objek yang ditinjau. Sebagai contoh dalam persoalan optimasi sistem misalnya, cocok menggunakan persamaan diferensial orde pertama.

Sementara dalam analisis respon transien atau frekuensi suatu sistem satu maşukan satu keluaran menggunakan fungsi alih akan lebih tepat. Setelah model matematik suatu sistem diperoleh, maka berbagai piranti analisis termasuk kompüter dapat digunakan dalam analisis maupun sintesis. Di bab ini akan ditunjukkan mengenai tahapan dalam pembuatan model matematika untuk berbagai sistem. Proses ini sangat penting untuk dipahami agar model matematika yang dihasilkan dapat digunakan dalam analisis.

3.2 Sistem Mekanika

Pada bagian ini kita akan mendiskusikan pembuatan model matematika sistem mekanika. Hukum dasar yang mengatur sistem mekanika adalah hukum kedua Newton. Ini dapat diterapkan pada sistem mekanika apapun. Berikut ini kita akan menurunkan model matematika dari beberapa sistem mekanika.

Tinjau sistem dashpot-massa-pegas yang dipasang pada kereta seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3.1. Dashpot adalah alat yang memberikan gesekan liat atau redaman

PROFIL PENULIS

Yoga Alif Kurnia Utama S.ST., M.T. lahir di Mojokerto,11 April 1990. Menamatkan Jurusan S1 Teknik Mekatronika S1 di Politeknik Elektronika Negeri Surabaya tahun 2012 dan S2 Teknik Sistem Pengaturan di ITS tahun 2015. Saat ini, penulis yang memiliki spesialisasi di bidang artificial intelligence ini, aktif mengajar di Universitas Widya Kartika sejak tahun 2016 dan pada tahun 2018 memperoleh Hibah Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi (PKPT) dan Program Kemitraan Masyarakat (PKM) dari Kemenristek Dikti dan dipercaya untuk membina UKM di bidang kuliner di Kota Mojokerto, Jawa Timur.

Yonatan Widianto, S.Kom., M.Kom. lahir di Malang, 22 Desember 1979. Lulusan STTS Jurusan S1 Teknik Informatika dan S2 Teknologi Informasi ini sampai sekarang aktif mengajar di Universitas Widya Kartika sejak tahun 2008. Disamping mengajar, penulis juga aktif dalam berbagai penelitian dari Hibah yang diterima oleh penulis yaitu Penelitian Dosen Pemula pada tahun 2014 dan 2018. Selain itu, penulis juga dipercaya oleh Kemenristek Dikti untuk mengembangkan media pembelajaran berbasis teknologi informasi untuk guru-guru SMA di surabaya melalui program Iptek bagi Masyarakat (IbM) pada tahun 2014.

Dr. Tri Arief Sardjono, S.T., M.T. lahir pada tanggal 12 Februari 1970 di Surabaya. Penulis telah menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Elektro di ITS pada tahun 1994 dan S2 Jurusan Teknik Biomedika di ITB pada tahun 1999, dan S3 Jurusan Teknik Biomedika di Universitas Groningen pada tahun 2007. Saat ini penulis merupakan dosen tetap di Jurusan Teknik Elektro ITS. Dosen yang juga menjabat sebagai Dekan Fakultas Elektro ITS ini, memiliki banyak penelitian di bidang Teknik Biomedik yang telah dimanfaatkan oleh masyarakat seperti Mesin Braillo 400 yang telah dipublikasikan baik dalam maupun luar negeri.

Dr. Ir. Hendra Kusuma, M.Eng.Sc lahir pada tanggal 2 September 1964 di Surabaya. Penulis sudah menamatkan pendidikan S1 Jurusan Elektro di ITS pada tahun 1988, S2 Jurusan Sistem Tenaga di Universitas Curtin tahun 2001, dan Jurusan Teknik Elektro di ITS pada tahun 2016. Penulis yang saat ini merupakan dosen tetap ITS Jurusan Teknik elektro ini banyak memiliki penelitian di bidang sistem tenaga dan *machine learning*. Beberapa penelitiannya yang terkait dengan *face recognition* telah di publikasikan di jurnal intenasional. Penulis juga aktif dalam program pengabdian masyarakat sebagai tenaga ahli dalam perbaikan Mesin Braillo 400 di SLBA Negeri Jakarta Pusat Sumber.

SINOPSIS

Seiring dengan perkembangan industri di masa sekarang, sistem pengaturan atau sistem kontrol memegang peranan yang sangat penting. Pemanfaatan ilmu sistem pengaturan telah meningkatkan efisiensi proses produksi dan mutu produk bagi industri. Perancangan kontroler yang tepat, dapat mengurangi peran manusia dalam proses produksi, sehingga menurunkan biaya produksi. Hal ini akan meningkatkan keuntungan bagi industri. Oleh karena itu, ilmu ini sangat penting untuk dikuasai dalam menjawab tantangan industri di masa yang akan datang.

Dalam menguasai ilmu sistem pengaturan maka diperlukan dasar-dasar ilmu teori yang kuat. Buku ini menjelaskan 4 bab yang berisi ilmu teori dasar sistem pengaturan, yaitu pengantar sistem pengaturan, transformasi laplace, model matematika sistem dan kontrol PID yang merupakan kontrol yang paling sering digunakan dalam industri. Diharapkan buku ini dapat menjadi panduan bagi para akademisi dalam mempelajari mata kuliah sistem pengaturan dasar dalam jurusan teknik elektro khususnya teknik sistem pengaturan.